

PRIMENE SLIČNOSTI NA PRAVOUGLI TROUGAO

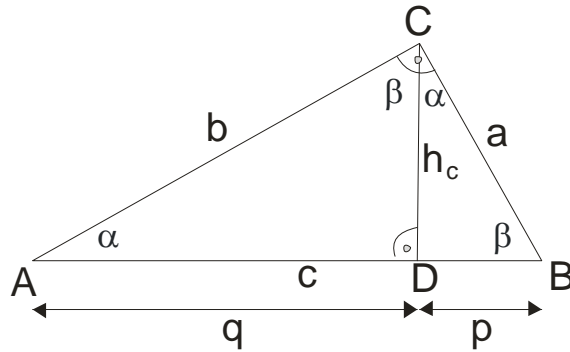
Nacrtajmo jedan pravougli trougao sa standardnim obeležavanjima:

a, b su katete

c je hipotenuza

h_c je hipotenuzina visina

p i q su odsecci na hipotenuzi koje pravi visina h_c



Hipotenuzina visina CD deli trougao ABC na dva pravouglata trougla : ADC i BDC . Možemo uočiti da sva tri pravouglata trougla imaju iste uglove α, β i $\gamma = 90^\circ$, pa su medjusobno **slični**.

Iz njihove sličnosti proizilazi proporcionalnost odgovarajućih stranica koja može da se formuliše kao :

i) **Hipotenuzina visina je geometrijska sredina odsečaka koje sama odseca na hipotenuzi, to jest** $\boxed{h_c = \sqrt{p \cdot q}}$

ii) **Kateta je geometrijska sredina hipotenuze i bližeg odsečka hipotenuze, to jest** $\boxed{a = \sqrt{c \cdot p}}$ i $\boxed{b = \sqrt{c \cdot q}}$
(ovo je Euklidov stav)

iii) **Trougao ABC je pravougli ako i samo ako je** $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$ (ovo je Pitagorina teorema)

Dakle, sad za pravougli trougao znamo sledeće formule:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$p + q = c$$

$$h_c = \sqrt{p \cdot q} \rightarrow h_c^2 = p \cdot q$$

$$a = \sqrt{c \cdot p} \rightarrow a^2 = c \cdot p$$

$$b = \sqrt{c \cdot q} \rightarrow b^2 = c \cdot q$$

$$h_c^2 + p^2 = a^2$$

$$h_c^2 + q^2 = b^2$$

$$O = a + b + c \rightarrow \text{obim}$$

$$P = \frac{a \cdot b}{2} \text{ ili } P = \frac{c \cdot h_c}{2} \rightarrow \text{površina}$$

$$h_c = \frac{a \cdot b}{c} \rightarrow \text{hipotenuzina visina}$$

$$R = \frac{c}{2} = t_c \rightarrow \text{poluprečnik opisane kružnice koji se nalazi na sredini hipotenuze}$$

$$r = \frac{a + b - c}{2} \rightarrow \text{poluprečnik upisane kružnice}$$

Primer 1.

Odrediti nepoznate elemente skupa $\{a, b, c, p, q, h_c\}$ ako je poznato:

i) $p = 16cm$
 $q = 9cm$

ii) $a = 130cm$
 $b = 312cm$

Rešenje:

i) $p = 16cm$
 $q = 9cm$

Koristimo formulice tako što prvo pronadjemo onu gde nam se javljaju dati elementi:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$p + q = c$$

$$h_c^2 = p \cdot q$$

$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

$$h_c^2 + p^2 = a^2$$

$$h_c^2 + q^2 = b^2$$

$$p = 16cm$$

$$q = 9cm$$

$$p + q = c \rightarrow c = 16 + 9 \rightarrow \boxed{c = 25cm}$$

$$h_c = \sqrt{pq} \rightarrow h_c = \sqrt{16 \cdot 9} = 4 \cdot 3 \rightarrow \boxed{h_c = 12cm}$$

$$a = \sqrt{c \cdot p} \rightarrow a = \sqrt{25 \cdot 16} = 5 \cdot 4 \rightarrow \boxed{a = 20cm}$$

$$b = \sqrt{c \cdot q} \rightarrow b = \sqrt{25 \cdot 9} = 5 \cdot 3 \rightarrow \boxed{b = 15cm}$$

ii) $a = 130cm$
 $b = 312cm$

$$a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow c^2 = 130^2 + 312^2 \rightarrow c^2 = 16900 + 97344 \rightarrow c^2 = 114244 \rightarrow \boxed{c = 338cm}$$

$$a^2 = c \cdot p \rightarrow p = \frac{a^2}{c} = \frac{16900}{338} \rightarrow \boxed{p = 50cm}$$

$$p + q = c \rightarrow q = c - p \rightarrow q = 338 - 50 \rightarrow \boxed{q = 288cm}$$

$$h_c = \sqrt{p \cdot q} \rightarrow h_c = \sqrt{50 \cdot 228} \rightarrow h_c = \sqrt{14400} \rightarrow \boxed{h_c = 120cm}$$

Primer 2.

Dokazati da u pravouglom trouglu važi jednakost: $\frac{1}{h_c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

Rešenje:

Krenućemo od desne strane jednakosti i doći do leve:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{b^2 + a^2}{a^2 \cdot b^2} \text{ u brojiocu imamo } \boxed{a^2 + b^2 = c^2} \text{ pa to zamenimo ...}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{b^2 + a^2}{a^2 \cdot b^2} = \frac{c^2}{a^2 \cdot b^2} \text{ prebacimo brojilac ispod imenioca(osobina dvojnog razlomka)...}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{b^2 + a^2}{a^2 \cdot b^2} = \frac{c^2}{a^2 \cdot b^2} = \frac{1}{\frac{a^2 \cdot b^2}{c^2}} = \frac{1}{\left(\frac{a \cdot b}{c}\right)^2} \text{ znamo da je } h_c = \frac{a \cdot b}{c} \rightarrow \text{hipotenuzina visina}$$

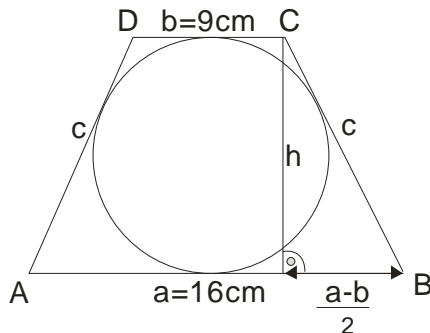
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{b^2 + a^2}{a^2 \cdot b^2} = \frac{c^2}{a^2 \cdot b^2} = \frac{1}{\frac{a^2 \cdot b^2}{c^2}} = \frac{1}{\left(\frac{a \cdot b}{c}\right)^2} = \frac{1}{h_c^2} \text{ ovim je dokaz završen.}$$

Primer 3.

U jednakokrakom trapezu osnovica 16cm i 9cm upisana je kružnica. Izračunati poluprečnik kružnice.

Rešenje:

Da najpre nacrtamo sliku i postavimo problem:



Pošto se radi o tangentnom četvorouglu, znamo da zbir naspramnih stranica mora biti jednak. To ćemo iskoristiti da najdemo dužinu kraka c .

$$a + b = 2c$$

$$16 + 9 = 2c$$

$$2c = 25 \rightarrow \boxed{c = \frac{25}{2} \text{ cm}}$$

Sad primenimo Pitagorinu teoremu da nađemo dužinu visine:

$$h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = c^2 \rightarrow h^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \rightarrow h^2 = \frac{625}{4} - \frac{49}{4}$$

$$h^2 = \frac{576}{4} \rightarrow h^2 = 144 \rightarrow \boxed{h = 12 \text{ cm}}$$

Znamo da je poluprečnik upisane kružnice jednak polovini visine:

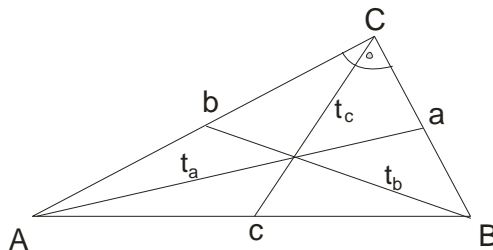
$$r = \frac{h}{2} \rightarrow r = \frac{12}{2} \rightarrow \boxed{r = 6 \text{ cm}} \text{ i evo rešenja.}$$

Primer 4.

Dokazati da u svakom pravouglom trouglu za težišne duži važi jednakost: $t_a^2 + t_b^2 = 5 \cdot t_c^2$

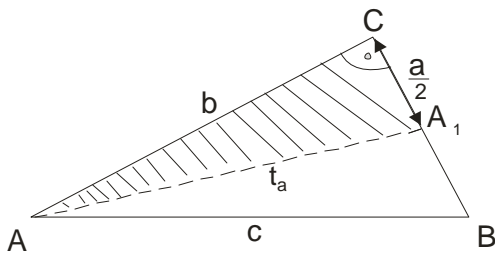
Rešenje:

Nacrtajmo najpre sliku :



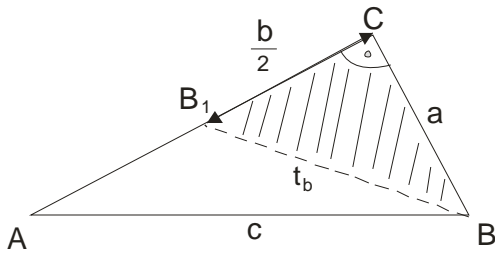
Ideja je da dva puta primenimo Pitagorinu teoremu.

Prvo primenjujemo na obeleženi trougao:



$$t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Sad na drugu stranu:



$$t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Saberimo ove dve jednakosti:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \end{array} \right\} \text{ saberemo ih...}$$

$$t_a^2 + t_b^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$t_a^2 + t_b^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} + a^2 + \frac{b^2}{4}$$

$$t_a^2 + t_b^2 = \frac{4b^2 + a^2 + 4a^2 + b^2}{4}$$

$$t_a^2 + t_b^2 = \frac{5a^2 + 5b^2}{4}$$

$$t_a^2 + t_b^2 = \frac{5(a^2 + b^2)}{4}$$

U brojiocu zamenimo $a^2 + b^2$ sa c^2 iz Pitagorine teoreme...

$$t_a^2 + t_b^2 = \frac{5 \cdot c^2}{4}$$

Ovde malo prepakujemo:

$$t_a^2 + t_b^2 = 5 \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

Znamo da je $t_c = \frac{c}{2}$

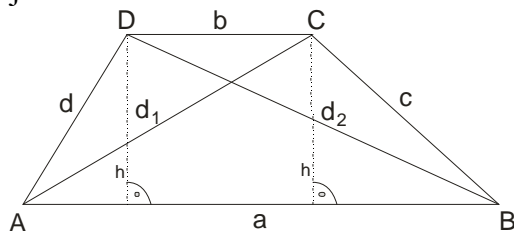
$$\boxed{t_a^2 + t_b^2 = 5 \cdot t_c^2}$$

Primer 5.

Ako su a i b osnovice, c i d kraci, a d_1 i d_2 dijagonale trapeza, tada važi: $d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab$. Dokazati.

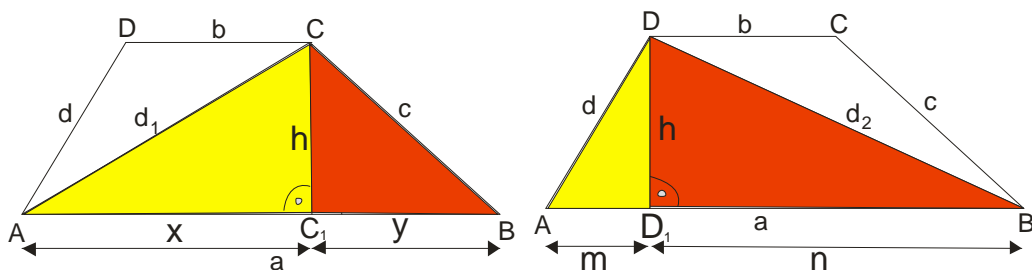
Rešenje:

Kao i uvek, nacrtamo sliku i tražimo ideju:



I ovde ćemo upotrebiti Pitagorinu teoremu.

Izrazimo visinu trapeza h sa iz žutog i iz crvenog trougla, pa to uporedimo:



$$h^2 = d_1^2 - x^2 \wedge h^2 = c^2 - y^2$$

$$d_1^2 - x^2 = c^2 - y^2$$

$$d_1^2 = c^2 + x^2 - y^2$$

$$d_1^2 = c^2 + (x+y)(x-y)$$

$$d_1^2 = c^2 + \frac{(x+y)}{a}(x-y)$$

$$d_1^2 = c^2 + a(x-y)$$

$$h^2 = d^2 - m^2 \wedge h^2 = d_2^2 - n^2$$

$$d_2^2 - n^2 = d^2 - m^2$$

$$d_2^2 = d^2 + n^2 - m^2$$

$$d_2^2 = d^2 + (n+m)(n-m)$$

$$d_2^2 = d^2 + \frac{(n+m)}{a}(n-m)$$

$$d_2^2 = d^2 + a(n-m)$$

Sad ćemo sabrati ove dve jednakosti:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1^2 = c^2 + a(x-y) \\ d_2^2 = d^2 + a(n-m) \end{array} \right\} \text{ saberemo ih...}$$

$$d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + a(x-y) + a(n-m)$$

$$d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + \boxed{a}(x-y) + \boxed{a}(n-m) \rightarrow a \text{ ispred zagrade ...}$$

$$d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + a(x-y+n-m) \rightarrow \text{pretumbamo ovo u zagradi...}$$

$$d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + a(x-m+n-y)$$

$$d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + a(\boxed{x-m} + \boxed{n-y}) \rightarrow \text{pogledajmo sliku: ovi uokvireni daju } b$$

$$d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + a(b+b)$$

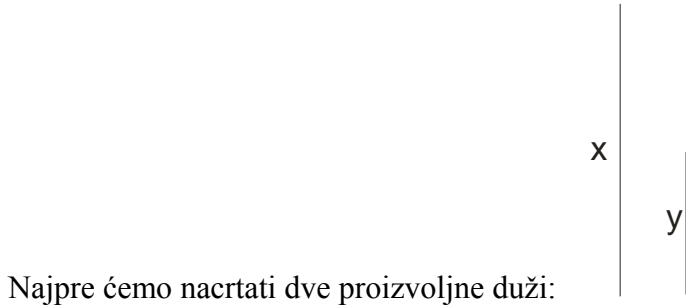
$$\boxed{d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab}$$

Evo par primera konstrukcija traženih duži.

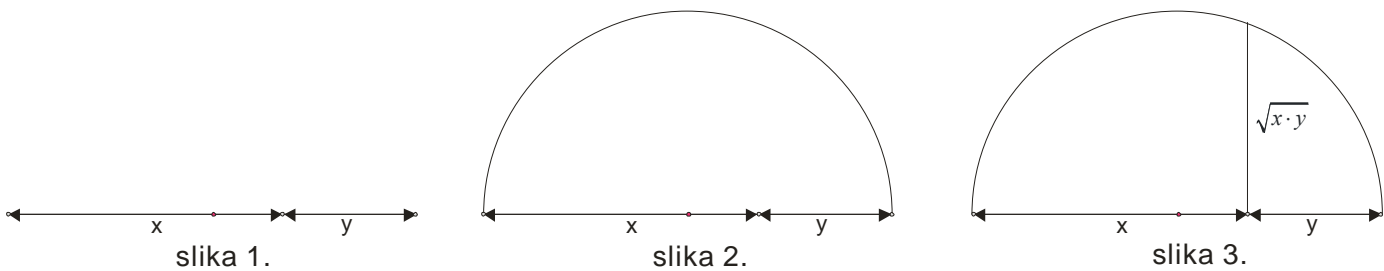
Primer 1.

Date su duži x i y . Konstruisati geometrijsku sredinu tih duži, to jest konstruisati $\sqrt{x \cdot y}$

Rešenje:



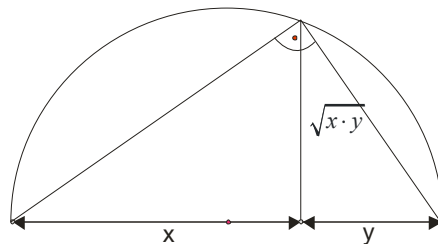
Njih zatim spojimo (postavimo jednu do druge), što je prikazano na **slici 1**.



Nadjemo sredinu duži $x + y$ i opišemo polukrug (**slika 2.**). Iz mesta preseka duži podignemo normalu (**slika 3.**)

Ta normala je rešenje, to jest ona je geometrijska sredina datih duži. **Zašto?**

Pa znamo da se centar opisane kružnice kod pravouglog trougla nalazi na sredini hipotenuze a da je visina geometrijska sredina odsečaka...



Primer 2.

Konstruisati duž čija dužina u odnosu na datu jediničnu duž (vi kad vežbate uzmete jediničnu duž 1 cm) iznosi:

a) $\sqrt{15}$

b) $\sqrt{7}$

Rešenje:

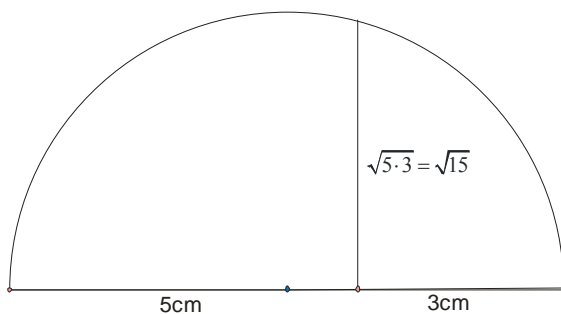
a) $\sqrt{15}$

Ideja kod ovog tipa zadatka je da se podkoreni broj napiše kao proizvod dva broja (bilo koja) i da se primeni znanje o konstrukciji geometrijske sredine:

$$\sqrt{15} = \sqrt{5 \cdot 3}$$

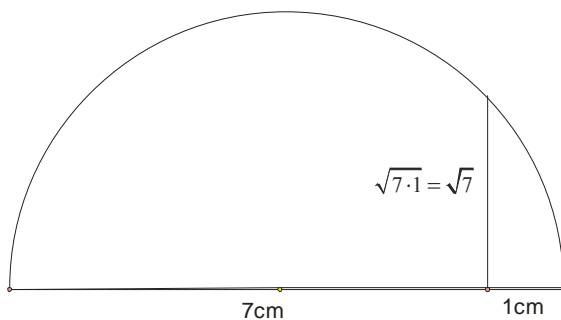
Dakle, uzmemo duži od 5cm i 3 cm, nacrtamo ih jednu do druge, nadjemo sredinu(na 4 cm) i opišemo polukrug.

Iz mesta preseka ove dve duži izdignemo normalu do preseka sa polukrugom i njena vrednost je $\sqrt{15}$.



b) $\sqrt{7}$

Slično: $\sqrt{7} = \sqrt{7 \cdot 1}$



Primer 3.

Date su duži čije su dužine a i b. Konstruisati duž dužine:

a) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

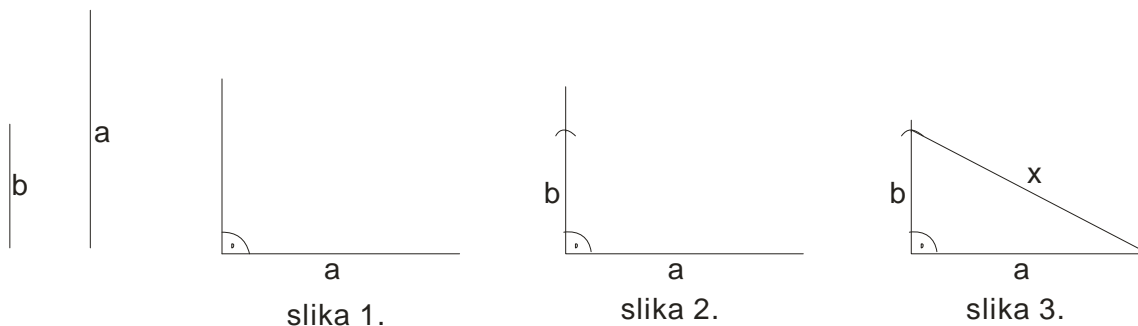
b) $y = \sqrt{a^2 - b^2}$

Rešenje:

a) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

Ako kvadriramo ovu jednakost, dobijamo: $x = \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow x^2 = a^2 + b^2$

Odavde zaključujemo da je tražena duž ustvari **hipotenuza** pravouglog trougla čije su katete a i b.



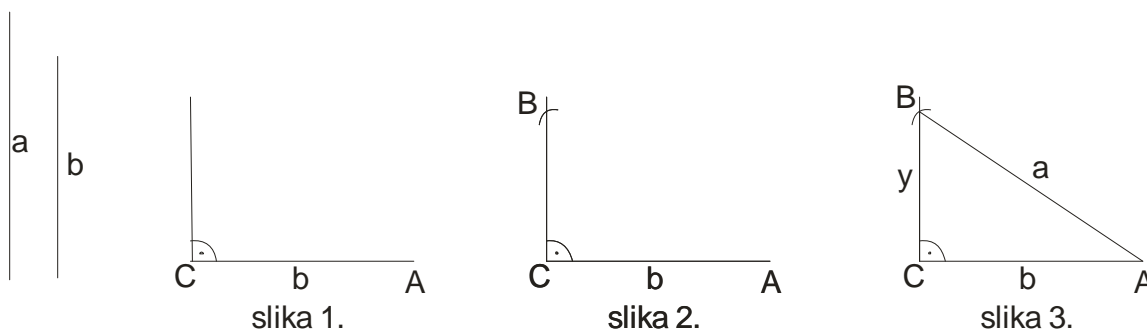
Uzmemo proizvoljne duži a i b. Prenesemo duž a i konstruišemo prav ugao (slika 1.)

Na toj polupravi nanesimo dužinu b (slika 2.) I kad to spojimo eto tražene duži .(slika 3.)

b) $y = \sqrt{a^2 - b^2}$

Kvadriramo i dobijemo: $y = \sqrt{a^2 - b^2} \rightarrow y^2 = a^2 - b^2$

Ovde je dakle tražena duž kateta pravouglog trougla sa **hipotenuzom a** i **katetom b**.



Na duž b konstruišemo prav ugao u temenu C. Iz temena A presečemo tu polupravu dužinom a. Dobili smo trougao

ABC, gde je kateta y rešenje našeg zadatka.

Primer 4.

Date su proizvoljne duži a,b i c. Konstruisati duž:

i) $x = \sqrt{ab + c^2}$

ii) $y = \sqrt{a^2 - bc}$

Rešenje:

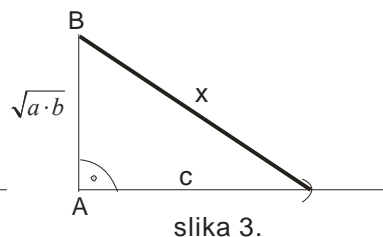
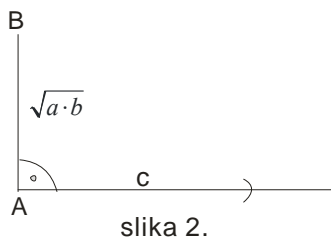
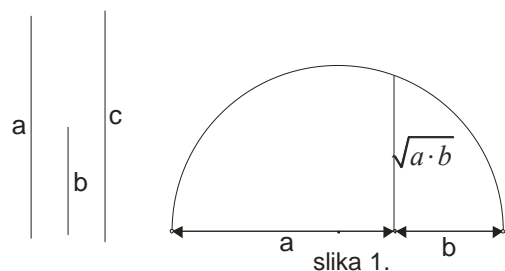
Ovi zadaci su ustvari kombinacija prethodnih, to jest koristi se i geometrijska sredina a i konstrukcija pravouglog trougla. Datu jednakost prvo malo prepravimo...

$x = \sqrt{ab + c^2}$ kvadriramo

$x^2 = ab + c^2$

$x^2 = (\sqrt{ab})^2 + c^2$

Prvo ćemo konstruisati \sqrt{ab} , a zatim pravougli trougao sa katetama \sqrt{ab} i c. Hipotenuza tog trougla je tražena duž.



ii) $y = \sqrt{a^2 - bc}$

$y = \sqrt{a^2 - bc}$ kvadriramo

$y^2 = a^2 - bc$

$y^2 = a^2 - (\sqrt{bc})^2$

Najpre konstruišemo \sqrt{bc} a zatim pravougli trougao sa katetom \sqrt{bc} i hipotenuzom dužine a. Sad je tražena duž kateta tog trougla.

